TUGAS AKHIR – SM141501

KAJIAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK FUZZY

ZICKY LUKMAN
NRP 06111440000084

Dosen Pembimbing:
Sunarsini, S.Si., M.Si.
Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi Dan Sains Data
Institut Sepuluh Nopember Surabaya
Surabaya 2018

FINAL PROJECT – SM141501

FIXED POINT THEOREM ON FUZZY METRIC SPACE

ZICKY LUKMAN
NRP 06111440000084

Supervisors:
Sunarsini, S.Si., M.Si.
Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si

MATHEMATICS DEPARTMENT
Faculty of Mathematics, Computing and Data Sciene
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK FUZZY

FIXED POINT THEOREM ON FUZZY METRIC SPACE

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada bidang Studi Matematika Analisis
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi Dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ZICKY LUKMAN
NRP 06111440000084

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si.	Sunarsini, S.Si.,M.Si.
NIP. 19591121 198903 1 001	NIP. 19691004 199402 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Agustus 2018

KAJIAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK FUZZY

Nama Mahasiswa	: ZICKY LUKMAN
NRP	: 06111440000084
Departemen	: Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing	:1. Sunarsini, S.Si.,M.Si.
	2. Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si.

Abstrak

Metrik mempunyai peranan penting dalam matematika analisis maupun terapan. Seiring perkembangan jaman, perluasan dari ruang metrik mulai terus dikaji dan diteliti lebih dalam. Salah satu perluasan dari ruang ini adalah ruang metrik fuzzy. Konsep dasar dari ruang metrik fuzzy berbeda dengan konsep ruang metrik, yaitu pada domain dan kodomain fungsi metrik fuzzy, nilai fungsi saat x=y dan pertidaksamaan segitiga fungsi metrik fuzzy yang melibatkan norm-t kontinu. Subjek yang dikaji pada tugas akhir ini adalah kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, kelengkapan dan hubungan antara sifat-sifat tersebut serta teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy.

Kata kunci: *ruang metrik, ruang metrik fuzzy, teorema titik tetap*

FIXED POINT THEOREM ON FUZZY METRIC SPACE

Name	: ZICKY LUKMAN
NRP	: 06111440000084
Department	: Mathematics FMKSD-ITS
Supervisors	:1. Sunarsini, S.Si.,M.Si.
	2. Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si.

Abstract

Metric has an important role in analytical and applied mathematics. As time passes, the expansion of the metric space continues to be studied and examined more deeply. One of the extensions of this space is the fuzzy metric space. The basic concept of fuzzy metric space differs from the concept of metric space, that is to the domain and codomain function of the fuzzy metric, the value of the current function of $x = y$ and the inequalities of the triangular function of the fuzzy metrics involving continuous norms. Subjects studied in this final project are the convergence of sequences, Cauchy sequences, completeness and relationships between these properties and fixed point theorem in the fuzzy metric space.

Kata kunci: *metric space, fuzzy metric space, fixed point theorem*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillaahirabbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufiq serta hidayah - Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"KAJIAN TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK FUZZY"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan/atau penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.

2. Ibu Sunarsini, S.Si., M.Si. dan Bapak Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si. selaku dosen pembimbing atas bimbingan, saran dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Ibu Drs. Nur Asiyah, M.Si., Ibu Dian Winda S., S.Si., M.,Si., dan Ibu Soleha, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas semua materi, saran dan perbaikan Tugas Akhir yang telah diberikan.

4. Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik dan tanggung jawab selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.

5. Keluarga di Jember, keluarga besar di Tuban, Semarang dan Jakarta yang selalu mendoakan, terutama ayah dan ibu yang tidak lelah mendoakan putra kesayangan serta kakak di Bandung yang masih sempat mengirim kajian via medsos

6. Para pengunjung lab model dan ROPD, yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, yang telah membantu penyusunan Tugas Akhir ini, baik dari S1 maupun S2.

7. Mas Suef, Mas Adit, Mas Ricky, Mas Agus, Mas Dimas a.k.a. Uzu dan Reza yang masih sempat meluangkan waktunya untuk membantu penulis menyelesaikan Tugas Akhir

8. Teman-teman AKSIOM14 yang selalu memberikan semangat, lebih khususnya yang menyertakan nama penulis pada Tugas Akhir angkatan 2014.

Penulis juga menyadari bahwa dalam pengerjaan ini masih ada kekurangan dan kesalahan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\forall$	: Untuk setiap
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan natural
$\{x_n\}$	: Barisan bilangan real
$\exists$	: Terdapat/ ada
$\ni$	: Sedemikian hingga
ϵ	: Epsilon
$\lvert \cdot \rvert$	: Nilai mutlak pada $\mathbb{R}$/ modulus pada $\mathbb{C}$
$\exp(\dots)$	: Eksponensial
d_f	: Metrik fuzzy
d_f^*	: Metrik fuzzy yang di-*induce* dari metrik $d(x,y)$
φ	: phi
Tx	: Pemetaan linier T dengan variabel x

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Lalu, didalamnya mencakup permasalahan pada topik Tugas Akhir, yang selanjutnya dirumuskan menjadi permasalahan serta diberikan batasan-batasan untuk pembahasan pada Tugas Akhir ini

1.1. Latar Belakang Masalah

Dalam perkembangan ilmu matematika pada era sekarang ini, terjadi perkembangan yang fundamental pada bidang-bidang matematika, salah satunya adalah teori himpunan.

Pada bidang ini, L. A. Zadeh memperkenalkan sebuah konsep baru, yaitu himpunan fuzzy [6]. Dengan adanya konsep baru ini mengakibatkan muncul konsep-konsep baru yang juga melibatkan konsep di atas, seperti kalkulus fuzzy, aljabar fuzzy, kontrol fuzzy dan lain sebagainya [7].

Selain yang disebutkan di atas, bidang analisis pun mengalami perkembangan, khususnya pada metrik. Sudah banyak kajian ruang metrik yang dilakukan, seperti Czerwick yang memperkenalkan ruang b-metrik, dimana perbedaan dengan ruang metrik adalah kodomain b-metrik yang berupa $\mathbb{R}^+$ dan adanya konstanta r [8], serta Huang dan Zhang yang membahas tentang ruang metrik cone, yang mana kodomain metrik cone berupa E yang merupakan ruang Banach [9]. Lalu, Auda Nuril membahas mengenai ruang b-metrik cone yang merupakan perluasan dari ruang b-metrik dan ruang metrik cone [15]. Berbeda dengan peneliti sebelumnya, Kramosil dan Michalek menggabungkan konsep ruang metrik dengan konsep himpunan fuzzy sehingga muncul ruang baru yaitu ruang metrik fuzzy-KM [10]. Lalu, oleh George dan Veeramani mengembangkan lagi ruang metrik fuzzy-KM dengan mendefinisikan ulang dari ruang metrik fuzzy sebelumnya, sehingga muncul ruang yang sama dengan nama yang berbeda yaitu ruang metrik fuzzy-GV [11].

Akibat hasil dari [10] dan [11], peneliti dari berbagai negara mulai membahas ruang metrik fuzzy dari berbagai aspek. Kumam dan Wutiphol membahas teorema titik tetap untuk pasangan pemetaan kompatibel lemah pada ruang metrik fuzzy, baik dari Kramosil dan Michalek maupun George dan Veeramani, dengan menggunakan karakteristik baru [1]. Lalu, Turkoglu dkk. membentuk titik tetap pada ruang metrik fuzzy lengkap [2]. Kemudian, Valentin dkk. mengkontruksi ruang metrik fuzzy tidak lengkap milik George dan Veeramani yang memungkinkan menjawab *open question* terkait kontinuitas parameter real t [5].

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian tugas akhir ini dikaji konsep fuzzy pada bidang analisis fungsional, yaitu ruang metrik fuzzy, khususnya pada teorema titik tetap.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, didapat rumusan masalah pada tugas akhir ini, yaitu :

1. Bagaimana keterkaitan antara barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan pada ruang metrik fuzzy?
2. Bagaimana bentuk titik tetap pada ruang metrik fuzzy?

1.3. Batasan Masalah

Contoh yang dipakai pada pemetaan kontraktif di ruang metrik fuzzy adalah $V \subseteq \mathbb{R}^2$

1.4. Tujuan

Penelitian tugas akhir ini bertujuan sebagai berikut:

1. Mendapatkan hubungan antara barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan pada ruang metrik fuzzy.
2. Memperoleh bentuk titik tetap pada ruang metrik fuzzy.

1.5. Manfaat

Adapun manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan pengetahuan tambahan tentang ruang-ruang metrik
2. Sebagai referensi atau bahan kajian tambahan mahasiswa matematika ITS dalam ilmu matematika analisis dan aplikasinya

1.6. Sistematika Penulisan

Penulisan disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Di dalamnya mencakup penetlitian terdahulu dan materi pendukung Tugas Akhir ini, seperti ruang metrik, norm-t, himpunan fuzzy dan ruang metrik fuzzy.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir.

Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai ruang metrik fuzzy dan teorema titik tetap, lalu mengembangkan teorema tersebut pada ruang metrik fuzzy lengkap beserta contohnya.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan topik yang akan dikaji pada tugas akhir ini meliputi konsep ruang metrik, konsep norm-t dan himpunan fuzzy serta ruang metrik fuzzy.

2.1. PenelitianTerdahulu

Poom Kumam dan Wutiphol Sintunavarat memaparkan bahwa jika dua fungsi f dan g pada suatu ruang metrik (X, d) memenuhi sifat CLRg (*Common Limit in the Range of g),* maka fungsi f dan g memiliki titik tetap [1].

Lalu, Valentin Gregori, J.J. Minana dan Samuel Morillas membahas suatu masalah yang ada pada bahasan mereka sebelumnya dengan mengkonstruksi ruang metrik fuzzy lemah. Namun, mereka memaparkan bahwa bahasan yang disampaikan hanya untuk memperoleh ruang metrik fuzzy yang tidak kuat dikarenakan banyak literatur memberikan hasil untuk ruang metrik fuzzy yang kuat (non-Archimedean) [5].

Kemudian, Turkoglu, dkk. membahas teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy lengkap dengan menambahkan *self-mappings* pada bahasan mereka untuk menentukan titik tetap di ruang metrik fuzzy tersebut [2].

Setelah membahas penelitian terdahulu, berikut dibahas tentang bahasan utama pada Tugas Akhir ini, yaitu ruang metrik dan himpunan fuzzy.

2.2. Ruang Metrik

Pada subbab ini, dijelaskan mengenai definisi dan sifat-sifat dasar ruang metrik yang merupakan dasar dari pengembangan ruang metrik fuzzy.

Definisi 2.2.1 [4]

Diberikan sebuah himpunan tak kosong V dan didefinisikan sebuah fungsi bernilai real $d: V \times V \to \mathbb{R}$. Fungsi d dikatakan metrik jika $\forall x, y, z \in V$ memenuhi

M1. $d(x, y) \geq 0$

M2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3. $d(x, y) = d(y, x)$

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Jika d metrik di V, maka pasangan (V, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.2.1a

Diberikan $V = \mathbb{R}$ dan didefinisikan suatu fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Definisi 2.2.1, $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik dengan d metrik di $\mathbb{R}$

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan d adalah metrik pada $\mathbb{R}$

M1. $d(x, y) \geq 0$

Dari definisi

$$d(x, y) = |x - y|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$. Karena nilai mutlak selalu bernilai tak negatif, berakibat $d(x,y) = |x - y| \geq 0$

M2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \\ |x - y| &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} x &= y \\ x - y &= 0 \\ |x - y| &= |0| \\ |x - y| &= 0 \\ d(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

M3. $d(x,y) = d(y,x)$

Diketahui,

$$d(x,y) = |x - y|$$

Dapat ditulis

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(-1)(y - x)| \\ &= |-1||y - x| \end{aligned}$$

Karena fungsi mutlak selalu non negatif dan $|-1| = |1| = 1$ berakibat

$$|-1||y - x| = |y - x|$$

sehingga

$$|x-y| = |y-x|$$

M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Dengan pertidaksamaan segitiga, $d(x,y)$ dapat dituliskan dengan

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Karena telah dipenuhi dari $M1 - M4$, berakibat d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik.

Contoh 2.2.1b [4]

Diberikan $V = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan suatu fungsi metrik $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Metrik ini disebut metrik Euclid pada $\mathbb{R}^2$ dan ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ disebut ruang metrik Euclid dimensi 2.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ dan $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ serta $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan d adalah metrik pada $\mathbb{R}^2$

M1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$

Diketahui,

$$(x_1 - y_1)^2 \geq 0$$

dan

$$(x_2 - y_2)^2 \geq 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 &\geq 0 \\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} &\geq 0 \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\geq 0 \end{aligned}$$

M2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= 0 \\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} &= 0 \\ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Karena $(x_1 - y_1)^2 \geq 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 \geq 0$, berakibat persamaan di atas dipenuhi jika

$$(x_1 - y_1)^2 = 0$$

dan

$$(x_2 - y_2)^2 = 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= 0 \\ x_2 - y_2 &= 0 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Karena $x_i = y_i$, $i = \{1, 2\}$ dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}^2$, bisa disimpulkan

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

($\Leftarrow$)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Akibat dari persamaan di atas dengan $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2\}$ dan $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2\}$, didapat

$$x_1 = y_1$$

dan

$$x_2 = y_2$$

sehingga

$$x_1 - y_1 = 0$$
$$x_2 - y_2 = 0$$

Lalu,

$$(x_1 - y_1)^2 = 0$$
$$(x_2 - y_2)^2 = 0$$

Dengan menambahkan ruas kiri, didapat

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$$
$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$$
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

M3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

Diketahui bahwa

$$(x_1 - y_1)^2 = (y_1 - x_1)^2$$

dan

$$(x_2 - y_2)^2 = (y_2 - x_2)^2$$

sehingga

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ambil $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Dengan meninjau $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ sebagai bilangan kompleks dimana $x = x_1 + x_2 i$, $y = y_1 + y_2 i$ dan $z = z_1 + z_2 i$, modulus dari selisih dua bilangan kompleks, misalkan x dengan y, adalah

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)i| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa nilai modulus $x - y$ sama dengan definisi metrik pada $\mathbb{R}^2$ untuk sebarang $x, y \in \mathbb{R}^2$. Karena $\mathbb{C}$ merupakan ruang metrik dibawah metrik $d_{\mathbb{C}}(x, y) = |x - y|$, berakibat untuk sebarang $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dan $z = (z_1, z_2)$ berlaku

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - z + z - y| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$$
$$\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$
$$+ \sqrt{\left(z_1 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - y_2\right)^2}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Karena memenuhi $M1 - M4$, berakibat d merupakan metrik pada $\mathbb{R}^2$ dan $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.

Selanjutnya, diberikan definisi mengenai kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik

Definisi 2.2.2 [4]

Suatu barisan $\{x_n\}$ dalam suatu ruang metrik (V, d) dikatakan konvergen ke $x \in V$, dinotasikan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, jika barisan bilangan real tak negatif $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$, atau dengan kalimat lain $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_n, x) < \epsilon$ untuk $n \geq N_\epsilon$

Contoh 2.2.2 [13]

Diberikan $V = \mathbb{R}$ dan fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ konvergen ke $x = 1 \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, akan ditunjukkan $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di $\mathbb{R}$

Karena $\epsilon > 0$ berakibat $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Menurut [13], ada $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{\epsilon} < N_\epsilon$ yang berakibat $\frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$. Jika $n \geq N_\epsilon$, maka dengan meninjau $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pada $\mathbb{R}$ didapat

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Untuk $n \geq N_\epsilon$, berlaku $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di $\mathbb{R}$

Sebelum mendefinisikan ruang metrik lengkap, diuraikan definisi terlebih dahulu tentang barisan Cauchy yang berkaitan dengan ruang metrik lengkap.

Definisi 2.2.3 [3]

Barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (V, d) dikatakan barisan Cauchy jika $\forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_m, x_n) < \epsilon \; \forall m, n \geq K_\varepsilon$.

Contoh 2.2.3 [13]

Diberikan $V = \mathbb{R}$ dan fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$ di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ merupakan barisan Cauchy.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, akan ditunjukkan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$

Untuk $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $n > m$ dan pertidaksamaan segitiga, didapat

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{(m+1)!}\right| + \left|\frac{1}{(m+2)!}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{\mathrm{n}!}\right| \\
&= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Karena $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$ berlaku $2^n \leq n!$ sehingga $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$. Akibat pertidaksamaan ini didapat

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^m} < \epsilon$$

Untuk $n, m \geq K_\epsilon$, berlaku

$$2^m \geq 2^{K_\epsilon}$$
$$\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{K_\epsilon}}$$

Hal tersebut dijamin pada [13] bahwa terdapat $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $K_\epsilon > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ dengan $\log_2 \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$.

Jadi, terbukti $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Dari Definisi 2.2.2 dan 2.2.3, diperoleh teorema di bawah ini

Teorema 2.2.4 [4]

Diberikan suatu ruang metrik (V, d). Jika $\{x_n\}$ suatu barisan konvergen di V, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Pada umumnya, tidak berlaku sebaliknya.

Dari Teorema 2.2.4, diberikan dua contoh sebagai berikut

Contoh 2.2.4a

Diberikan $V = \mathbb{R}$ dan fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ konvergen di $\mathbb{R}$ yang mengakibatkan $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Penylesaian:

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, akan ditunjukkan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di $\mathbb{R}$ yang mengakibatkan $\{x_n\}$ barisan Cauchy

Diketahui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Menurut [13], ada $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq K_\epsilon$ maka

$$\begin{aligned}
|x_n - x| &= \left|\frac{1}{2n} - 0\right| \\
&= \left|\frac{1}{2n}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2K_\epsilon}\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Karena menurut Teorema 2.2.4 $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen di $0 \in \mathbb{R}$, berakibat $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy

Contoh 2.2.4b [4]

Diberikan $V = (0,1]$ dan fungsi $d: (0,1] \times (0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pada ruang metrik $((0,1], d)$ merupakan barisan Cauchy namun tidak konvergen di $(0,1]$

Penyelesaian:

Analog dengan Contoh 2.2.4a bahwa $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy.

Namun, perhatikan bahwa $\frac{1}{n+1} \to 0$ untuk $n \to \infty$ dan $0 \notin (0, 1]$ sehingga $\{x_n\}$ tidak konvergen pada $(0,1]$.

Jadi, terbukti $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy pada $(0,1]$ namun tidak konvergen di $(0, 1]$

Setelah menjelaskan kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy, berikut dijelaskan mengenai kelengkapan pada ruang metrik pada [3].

Definisi 2.2.5

Diberikan suatu ruang metrik (V, d) dengan barisan $\{x_n\}$ pada (V, d). Ruang metrik (V, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen di V.

Contoh 2.2.5

Diberikan $V = \mathbb{R}$ dan fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Pasangan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik lengkap.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, akan ditunjukkan barisan Cauchy di $(\mathbb{R}. d)$ konvergen di $\mathbb{R}$

Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy, menurut [13] berakibat $\{x_n\}$ terbatas di $\mathbb{R}$. Karena $\{x_n\}$ terbatas di $\mathbb{R}$, menurut [13] berakibat $\{x_n\}$ punya subbarisan, katakan $\{x_{n_k}\}$ dan x adalah limit dari $\{x_{n_k}\}$. Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy, maka $\exists K_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n, m \geq K_{\frac{\epsilon}{2}}$ berakibat $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Karena $\{x_{n_k}\} \to x$, berakibat $n_k \geq K_{\frac{\epsilon}{2}}$ sehingga $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Untuk $n > n_k$,

$$
\begin{aligned}
|x_n - x| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \\
&\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

sehingga $\{x_n\}$ konvergen. Jadi, terbukti setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ konvergen sehingga $(\mathbb{R}, d)$ lengkap

Selanjutnya, diberikan definisi penting mengenai pemetaan kontraktif pada ruang metrik pada [3].

Definisi 2.2.6

Diberikan suatu ruang metrik (V, d). Pemetaan $T: V \to V$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat $k \in \mathbb{R}$ dengan $0 < k < 1$ sedemikian hingga

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$$

Lalu, setelah membahas tentang ruang metrik, dari definisi ruang metrik hingga kelengkapannya serta pemetaan kontraktif, berikut dipaparkan mengenai himpunan fuzzy.

2.3. Himpunan Fuzzy

Diberikan himpunan semesta X. Didefinisikan $A \subset X$ sebagai *fuzzy subset*, ditulis $\check{A}$, adalah himpunan pasangan $x \in X$ beserta derajat keanggotaannya, yaitu $\check{A} = \left\{\left(x, \mu_{\check{A}}(x)\right); x \in X\right\}$ dengan $\mu_{\check{A}}: X \to [0,1]$ sebagai fungsi keanggotaan dari $\check{A}$ (*membership function*) [6].

Contoh 2.3.1 [7]

Diberikan $X = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ menyatakan himpunan rumah dengan banyak tempat tidur dan $\check{A}$ adalah himpunan rumah dengan tingkat kenyamanan dari keluarga empat orang (untuk kasus ini, A merupakan keluarga yang terdiri dari ayah, ibu dan dua anak yang sudah dewasa). Dari hal ini dapat dituliskan $\check{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$.

Contoh 2.3.2

Dari Contoh 2.3.1, bisa dibuat suatu himpunan fuzzy yang lain dari domain X yang sama. Misalkan $\check{B}$ didefinisikan sama seperti $\check{A}$ pada Contoh 2.3.1, namun B merupakan keluarga yang terdiri dari ayah, ibu, 1 anak yang sudah remaja dan 1 anak yang masih balita. Himpunan fuzzy yang baru bisa dituliskan dengan $\check{B} = \{(2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.3)\}$.

Dari Contoh 2.3.1 dan 2.3.2, dapat dilihat bahwa nilai dari $\mu_{\check{A}}(x)$ dan $\mu_{\check{B}}(x)$ berbeda meskipun nilai x yang diambil sama. Hal ini disebabkan oleh *expert* yang memberikan *membership function* pada masing-masing anggota himpunan X memiliki tingkat kepercayaan yang berbeda, atau dengan kata lain $\mu(x)$ bersifat subjektif.

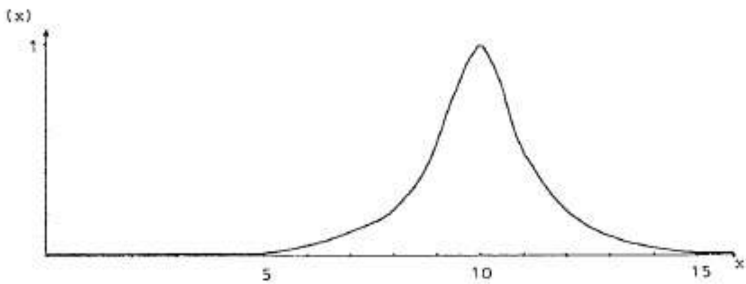
Berikut diberikan contoh lain terkait himpunan fuzzy pada [7].

Contoh 2.3.3

Diberikan $X = \mathbb{R}$ dan $\check{C}$ adalah himpunan bilangan real yang dekat dengan 10 dimana

$$\check{C} = \left\{\left(x, \mu_{\check{C}}(x)\right) \middle|\, \mu_{\check{C}}(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}, x \in X\right\}$$

Berbeda dengan Contoh 2.3.1 dan 2.3.2, untuk penyajian



Gambar 2.1 Himpunan Fuzzy $\check{C}$

himpunan fuzzy $\check{C}$ biasanya diberikan gambar seperti berikut

Hal ini dikarenakan $\mathbb{R}$ yang bersifat *uncountable* sehingga tidak bisa disajikan seperti pada Contoh 2.3.1 dan 2.3.2

Setelah menjelaskan tentang himpunan fuzzy, berikut dijelaskan mengenai *support* dan α-level dari suatu himpunan fuzzy pada [7]

Definisi 2.3.4

Support dari suatu himpunan fuzzy $\breve{A}$, $S(\breve{A})$ adalah himpunan dari semua $x \in X$ dimana $\mu_{\breve{A}}(x) > 0$ atau bisa dituliskan dengan

$$S(\breve{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\breve{A}}(x) > 0\}$$

Contoh 2.3.4

Dari Contoh 2.3.1 hingga 2.3.3, $S(\breve{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebab untuk $\{7, 8, 9, 10\}$ pada Contoh 2.3.1, $\mu_{\breve{A}}(x) = 0$. Lalu, $S(\breve{B}) = \{2, 3, 4, 5\}$ sebab untuk $X - S(\breve{B})$ pada Contoh 2.3.2, $\mu_{\breve{B}}(x) = 0$. Untuk Contoh 2.3.3, $S(\breve{C}) = X$ sebab $\mu_{\breve{C}}(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1} > 0$ meskipun secara kasat mata pada Gambar 2.1 ada suatu selang yang bernilai 0

Selanjutnya, dijelaskan mengenai α-level dari suatu himpunan fuzzy pada [7]

Definisi 2.3.5

Himpunan α-level atau α-*cut*, A_α merupakan suatu himpunan fuzzy $\breve{A}$ dimana anggotanya ditentukan oleh suatu derajat α, atau bisa dituliskan dengan

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\breve{A}}(x) \geq \alpha\}$$

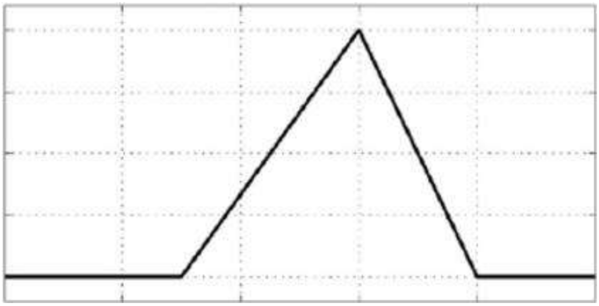
Contoh 2.3.5

Dari Contoh 2.3.1 hingga 2.3.3, dengan mengambil $\alpha = 0.5$ didapat

$$A_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$B_{0.5} = \{2, 3, 4\}$$
$$C_{0.5} = \{9 \leq x \leq 11, x \in X\}$$

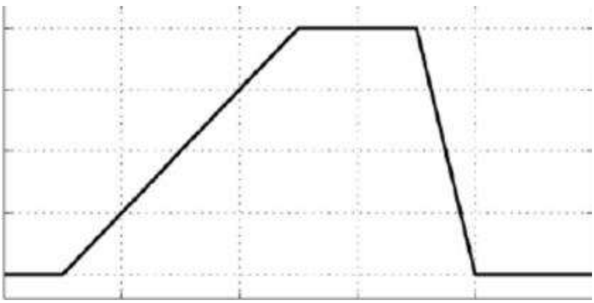
Dari Contoh 2.3.3. hingga 2.3.5, berikut diberikan mengenai jenis-jenis dari *membership function* yang sering digunakan dalam aplikasi himpunan fuzzy, yaitu

1. *Triangle Membership Function*



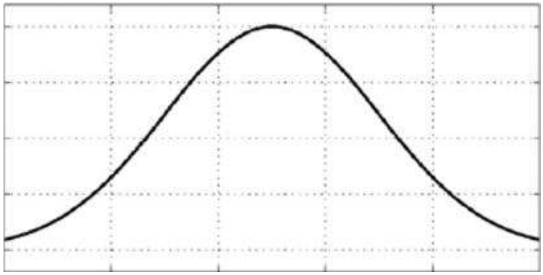
Gambar 2.2 Fungsi Keanggotaan Segitiga

2. *Trapezoidal Membership Function*



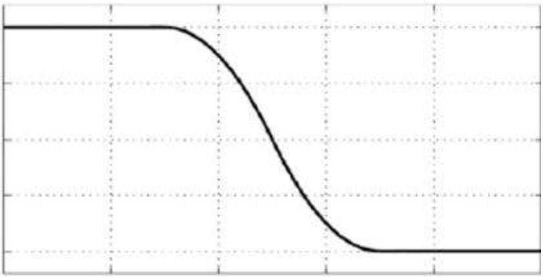
Gambar 2.3 Fungsi Keanggotaan Trapesium

3. *Gaussian Membership Function*



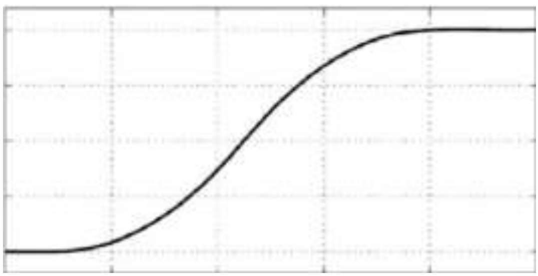
Gambar 2.4 Fungsi Keanggotaan Gauss

4. *Z-shape Membership Function*



Gambar 2.5 Fungsi Keanggotaan *Z-shape*

5. *S-shape Membership Function*



Gambar 2.6 Fungsi Keanggotaan *S-shape*

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah Tugas Akhir. Selain itu, dijelaskan prosedur dan proses tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

Adapun tahapan penelitian Tugas Akhir ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Studi Literatur

   Di tahap ini dilakukan studi referensi tentang ruang metrik, norm-t dan ruang metrik fuzzy serta sifat kelengkapan, kekonvergenan dan Cauchy pada ruang tersebut. Referensi yang akan dicari adalah berasal dari jurnal - jurnal ataupun buku – buku literatur yang sesuai topik tugas akhir ini.

b. Mempelajari Konsep Ruang Metrik Fuzzy Lengkap

   Untuk tahap ini dilakukan pemahaman inti dari ruang metrik dan norm-t.Setelah itu, pemahaman pada ruang metrik fuzzy dan konsep konvergensi barisan serta barisan Cauchy yang berlaku pada ruang metrik tersebut.Kemudian, memahami bentuk kelengkapan ruang metrik tersebut beserta lemma-lemma dan teorema-teorema yang mendasari konsep tersebut..

c. Mengkaji Teorema Titik Tetap

   Tahap ini adalah inti dari pengerjaan tugas akhir, yaitu setelah memahami ruang metrik fuzzy lengkap dan mendapatkan bentuk titik tetap dalam ruang metrik fuzzy, akan diselidiki bagaimana teorema tersebut dapat berlaku. Sehingga dari langkah ini akan diperoleh titik tetap dalam ruang metrik fuzzy lengkap.

d. Mengembangkan Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Fuzzy Lengkap dengan Contoh

Di tahap ini, akan dikembangkan dalam ruang metrik fuzzy lengkap khususnya pada $\mathbb{R}$ dari beberapa penelitian sebelumnya.

e. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Pada Tahap ini akan diambil kesimpulan berdasarkan penelitian yang dilakukan pada tahap sebelumnya, kemudian akan diberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

f. Pembukuan Tugas Akhir

Di tahap akhir ini, dilakukan penyusunan laporan berdasarkan hasil analisis

BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai hal-hal yang terkait dengan ruang metrik fuzzy, mulai dari norm-t kontinu, definisi ruang metrik tersebut, konvergensi barisan, barisan Cauchy dan kelengkapannya, lalu teorema titik tetap yang berlaku pada ruang metrik tersebut dan contoh yang terkait.

4.1. Ruang Metrik Fuzzy Lengkap

Sebelum membahas ruang metrik fuzzy, dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi dari norm-t kontinu beserta contohnya pada [1].

Definisi 4.1.1

Diberikan operasi biner $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. Operator $*$ disebut norm-t kontinu jika $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ memenuhi

Nt1. $a * b = b * a$ (komutatif)

Nt2. $(a * b) * c = a * (b * c)$ (asosiatif)

Nt3. $a * 1 = a$ (elemen identitas)

Nt4. Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$, maka memenuhi $a * b \leq c * d$ (keterurutan)

Setelah mendefinisikan norm-t kontinu, diberikan contoh yang memenuhi Definisi 4.1.1 dari [1]

Contoh 4.1.1

Diberikan $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $a * b = ab$. Berdasarkan Definisi 4.1.1, operator $*$ dengan $a * b = ab$ merupakan norm-t kontinu.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $a, b, c, d \in [0,1]$. Akan dibuktikan bahwa Contoh 4.1.1 memenuhi Definisi 4.1.1 sehingga operator $*$ adalah norm-t kontinu

Nt1. Komutatif

$$\begin{aligned} a * b &= ab \\ &= ba \\ &= b * a \end{aligned}$$

Nt2. Asosiatif

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= ab * c \\ &= (ab)c \\ &= \mathrm{a(bc)} \\ &= a * bc \\ &= a * (b * c) \end{aligned}$$

Nt3. Elemen Identitas

$$\begin{aligned} a * 1 &= a.1 \\ &= a \\ &= 1.a \\ &= 1 * a \end{aligned}$$

Nt4. Keterurutan

$$a \leq c \Rightarrow ab \leq cb \ldots (1)$$
$$b \leq d \Rightarrow bc \leq dc \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat

$$ab \leq bc \leq cd$$
$$ab \leq cd$$

Karena memenuhi $Nt1 - Nt4$, berakibat operator $*$ dengan $a * b = ab$ merupakan norm-t kontinu.

Pada [1], norm-t pada Contoh 4.1.1 bisa disebut *product t-norm.*

Setelah menjelaskan mengenai norm-t kontinu dan contohnya, berikut dibahas mengenai ruang metrik fuzzy beserta barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapannya.

Definisi 4.1.2 [2]

Diberikan 3-tuple $(V, d_f, *)$ dengan V himpunan tak kosong, d_f himpunan fuzzy dengan $M \subseteq V^2 \times (0, \infty)$ dan $d_f: M \to [0,1]$ serta $*$ norm-t kontinu. $(V, d_f, *)$ disebut ruang metrik fuzzy jika $\forall x, y, z \in V$ dan $t, s > 0$ dipenuhi

MF1. $d_f(x, y, t) > 0$

MF2. $d_f(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

MF3. $d_f(x, y, t) = d_f(y, x, t)$

MF4. $d_f(x, z, t + s) \geq d_f(x, y, t) * d_f(y, z, s)$

MF5. $d_f(x, y, \cdot): (0, \infty) \to [0,1]$ kontinu

Setelah mendefinisikan ruang metrik fuzzy, diberikan contoh yang memenuhi Definisi 4.1.2

Contoh 4.1.2a

Diberikan $V = \mathbb{N}$ dan $*$ norm-t kontinu dengan $a * b = ab$. Didefinisikan

$$d_f(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x \leq y \\ \dfrac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

$x, y \in V$, $t > 0$. $\left(V, d_f, *\right)$ merupakan ruang metrik fuzzy

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y, z \in V$. Akan ditunjukkan bahwa Contoh 4.1.2a merupakan ruang metrik fuzzy

MF1. $d_f(x, y, t) > 0$

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ dan $t > 0$, untuk $x \leq y$ dengan $d_f(x, y, t) = \frac{x}{y}$ didapat $d_f(x, y, t) > 0$, sebab sebarang $y > 0$, $\frac{1}{y} > 0$ dan dengan $x \in \mathbb{N}$ dijamin $\frac{x}{y} > 0$ atau $d_f(x, y, t) > 0$. Berlaku pula untuk $y \geq x$ dengan $d_f(x, y, t) = \frac{y}{x}$ didapat $d_f(x, y, t) > 0$ sebab sebarang $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ dan dengan $y \in \mathbb{N}$ dijamin $\frac{y}{x} > 0$ atau $d_f(x, y, t) > 0$.

MF2. $d_f(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

($\Rightarrow$)

$$d_f(x, y, t) = 1$$

dimana

$$\frac{x}{y} = 1, \qquad x \leq y$$

dan

$$\frac{y}{x} = 1, \qquad y \leq x$$

atau

$$x = y, \qquad x \leq y$$

dan

$$y = x, \qquad y \leq x$$

sehingga bisa disimpulkan dengan

$$x = y$$

(⇐)

$$x = y$$

Akibat dari persamaan di atas, diperoleh dua kondisi, yaitu untuk $x \leq y$,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{y} = 1$$

dan untuk $y \leq x$,

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{y} = 1$$

sehingga $d_f(x, y, t) = 1$

MF3. $d_f(x, y, t) = d_f(y, x, t)$

Diberikan

$$d_f(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

dan

$$d_f(y, x, t) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & y \leq x \\ \frac{x}{y}, & x \leq y \end{cases}$$

sehingga

$$d_f(x, y, t) = d_f(y, x, t)$$

MF4. $d_f(x, y, t + s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$

Diberikan

$$d_f(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x \leq y \ldots (1) \\ \dfrac{y}{x}, & y \leq x \ldots (2) \end{cases}$$

Untuk suatu $z \in V$, kondisi (1) di atas dibagi dalam tiga kondisi berikut

1a. $z \leq x \leq y$

Tinjau

$$x \geq z$$

Lalu,

$$\frac{x}{y} \geq \frac{z}{y}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{x} \geq \frac{z}{y} \cdot \frac{z}{x}$$

$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{x} \geq \frac{z}{y} \cdot \frac{z}{x}$$

$$\frac{x}{y} \geq \frac{z}{y} \cdot \frac{z}{x}$$

$$d_f(x, y, t + s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

1b. $x \leq z \leq y$

Diketahui bahwa

$$x \geq x$$

$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}$$
$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y}$$
$$d_f(x, y, t + s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

1c. $x \leq y \leq z$
Tinjau

$$y \leq z$$

Lalu,

$$\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$$
$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{z}$$
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \geq \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}$$
$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \geq \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}$$
$$\frac{x}{y} \geq \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}$$
$$d_f(x, y, t + s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

Lalu, untuk kondisi (2), sama halnya dengan (1), dibagi dalam tiga kondisi berikut

2a. $z \leq y \leq x$
Tinjau

$$y \geq z$$

Lalu,

$$\frac{y}{x} \geq \frac{z}{x}$$
$$\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \geq \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y}$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \geq \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y}$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y}$$
$$d_f(x, y, t+s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

2b. $y \leq z \leq x$

Diketahui bahwa

$$y \geq y$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{y}{x}$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}$$
$$d_f(x, y, t+s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

2c. $y \leq x \leq z$

Tinjau

$$x \leq z$$

Lalu,

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{z}$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{y}{z}$$
$$\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{z} \geq \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}$$
$$\frac{y}{x} \geq \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{z} \geq \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}$$
$$d_f(x, y, t+s) \geq d_f(x, z, t) * d_f(y, z, s)$$

Karena telah memenuhi semua kondisi $x, y, z \in V$ berakibat MF4 terpenuhi

MF5. $d_f(x, y, .) : (0, \infty) \to [0,1]$ kontinu

Diberikan

$$d_f(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

dengan $t = 1$. Karena nilai t yang diberikan merupakan konstan dan $\forall x, y \in V$, t selalu kontinu berakibat $d_f(x, y, \cdot)$ kontinu

Karena memenuhi $MF1 - MF5$, berakibat d_f merupakan metrik pada $\mathbb{N}$, atau dengan kata lain, $(\mathbb{N}, d_f^*, *)$ merupakan ruang metrik fuzzy.

Dari Definisi 4.1.2, pada [11] dikonstruksikan suatu metrik fuzzy d_f yang ter-*induce* dari metrik $d(x, y)$ pada contoh berikut

Contoh 4.1.2b

Jika diberikan (V, d) ruang metrik lengkap dan $*$ norm-t kontinu, $M \subseteq (V, d)^2 \times (0, \infty)$ dan $d_f^*: M \to [0, 1]$ yang didefinisikan

$$d_f^*(x, y, t) = \exp\left(-\frac{2d(x, y)}{t}\right)$$

dengan d metrik di V, $x, y \in (V, d)$, $t > 0$ dan $a * b = ab$, maka $\left((V, d), d_f^*, *\right)$ merupakan ruang metrik fuzzy.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y, z \in (V, d)$ dan $t, s > 0$. Akan dibuktikan bahwa Contoh 4.1.2b adalah ruang metrik fuzzy.

MF1. $d_f^*(x, y, t) > 0$

Karena (V, d) ruang metrik lengkap, dari M1 pada Definisi 2.2.1 diketahui bahwa

$$d(x, y) > 0$$

Karena $t > 0$,

$$\frac{d(x, y)}{t} > 0$$
$$\frac{2d(x, y)}{t} > 0$$
$$\exp\left(\frac{2d(x, y)}{t}\right) > \exp(0)$$
$$> 0$$
$$\exp\left(\frac{2d(x, y)}{t}\right) > 0$$

Karena untuk semua $x, y \in V$, $t > 0$ fungsi eksponensial selalu positif, berakibat

$$\exp\left(-\frac{2d(x, y)}{t}\right) > 0$$
$$d_f^*(x, y, t) > 0$$

MF2. $d_f^*(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

$(\Rightarrow)$ $d_f^*(x, y, t) = 1$

$$\exp\left(-\frac{2d(x, y)}{t}\right) = 1$$
$$\exp\left(-\frac{2d(x, y)}{t}\right) = \exp(0)$$

$$-\frac{2d(x,y)}{t} = 0$$

Untuk semua $t > 0$,

$$-2d(x,y) = 0$$
$$d(x,y) = 0$$

Berdasarkan M2 pada Definisi 2.2.1 didapat

$$x = y$$

($\Leftarrow$) $x = y$
Berdasarkan M2 pada Definisi 2.2.1 dapat ditulis

$$d(x,y) = 0$$
$$-2d(x,y) = 0$$

Karena $t > 0$,

$$-\frac{2d(x,y)}{t} = 0$$
$$\exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right) = \exp(0)$$
$$\exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right) = 1$$
$$d_f^*(x,y,t) = 1$$

MF3. $d_f^*(x,y,t) = d_f^*(y,x,t)$
Diberikan

$$d_f^*(x,y,t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$$

Karena berdasarkan M3 pada Definisi 2.2.1 dimana $d(x,y) = d(y,x)$, berakibat

$$\exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right) = \exp\left(-\frac{2d(y,x)}{t}\right)$$

$$= d_f^*(y,x,t)$$

Sehingga

$$d_f^*(x,y,t) = d_f^*(y,x,t)$$

MF4. $d_f^*(x,z,t+s) \geq d_f^*(x,y,t) * d_f^*(y,z,s)$

Dari M4 pada Definisi 2.2.1, diketahui bahwa,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
$$2d(x,z) \leq 2d(x,y) + 2d(y,z)$$

$$\leq 2d(x,y) + 2d(y,z) + \frac{s}{t}2d(x,y) + \frac{t}{s}2d(y,z)$$
$$= \left(\frac{t+s}{t}\right)2d(x,y) + \left(\frac{t+s}{s}\right)2d(y,z)$$
$$= (t+s)\left(\frac{2d(x,y)}{t} + \frac{2d(y,z)}{s}\right)$$

atau

$$2d(x,z) \leq (t+s)\left(\frac{2d(x,y)}{t} + \frac{2d(y,z)}{s}\right)$$

Karena $t,s > 0$, berakibat jika mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{t+s}$, maka tidak mengubah tanda pertidaksamaan, sehingga

$$\frac{2d(x,z)}{t+s} \leq \frac{2d(x,y)}{t} + \frac{2d(y,z)}{s}$$

$$\exp\left(\frac{2d(x,z)}{t+s}\right) \leq \exp\left(\frac{2d(x,y)}{t} + \frac{2d(y,z)}{s}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{2d(x,y)}{t}\right) \cdot \exp\left(\frac{2d(y,z)}{s}\right)$$

Jika mengalikan kedua ruas dengan $\exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)\exp\left(-\frac{2d(y,z)}{s}\right)\exp\left(-\frac{2d(x,z)}{t+s}\right)$, maka didapat

$$\exp\left(-\frac{2d(x,z)}{t+s}\right) \geq \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2d(y,z)}{s}\right)$$

$$d_f^*(x,z,t+s) \geq d_f^*(x,y,t) \cdot d_f^*(y,z,s)$$
$$d_f^*(x,z,t+s) \geq d_f^*(x,y,t) * d_f^* M_d(y,z,s)$$

MF5. $d_f^*(x,y,\cdot): (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ kontinu

Diberikan

$$d_f^*(x,y,t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$$

Karena fungsi eksponensial d_f^* merupakan fungsi kontinu $\forall x,y \in V$ dan $t > 0$, berakibat fungsi d_f^* yang diberikan kontinu.

Karena memenuhi $MF1 - MF5$, berakibat d_f^* merupakan metrik pada (V,d), atau dengan kata lain, $\left((V,d), d_f^*, *\right)$ merupakan ruang metrik fuzzy.

Pada [1], ruang metrik ini bisa disebut ruang metrik fuzzy-GV dan pada [11], metrik $d(x,y)$ dapat diganti dengan metrik khusus, salah satunya adalah $|x-y|$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai kekonvergenan barisan dan dilanjutkan dengan barisan Cauchy serta kelengkapan ruang metrik fuzzy.

Definisi 4.1.3 [11]

Diberikan $(V, d_f, *)$ ruang metrik fuzzy dan $\{x_n\}$ barisan pada $(V, d_f, *)$. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in V$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} d_f(x_n, x, t) = 1 \ \forall t > 0$

Contoh 4.1.3

Diberikan $(V, d_f, *)$ ruang metrik fuzzy dan $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x = 0 \in V$ pada $(V, d_f, *)$

Bukti:

Akan dibuktikan Contoh 4.1.3 agar memenuhi Definisi 4.1.3. Diberikan

$$d_f(x_n, x, t) = d_f\left(\frac{1}{n}, x, t\right)$$

Untuk $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} d_f(x_n, x, t) = \lim_{n\to\infty} d_f\left(\frac{1}{n}, x, t\right)$$

Karena diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dimana $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, berakibat,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_f(x_n, x, t) &= \lim_{n\to\infty} d_f\left(\frac{1}{n}, 0, t\right)\\ &= d_f(0, 0, t)\end{aligned}$$

Berdasarkan MF2 pada Definisi 4.1.2, karena $x = y = 0$ berakibat

$$d_f(0, 0, t) = 1$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d_f(x_n, x, t) = 1$$

Jadi, terbukti barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen pada $(V, d_f, *)$.

Sebelum masuk barisan Cauchy, diberikan keterkaitan antara kekonvergenan pada (V, d) dan $(V, d_f^*, *)$.

Lemma 4.1.4

Diberikan (V, d) ruang metrik lengkap dan $\{x_n\}$ barisan pada (V, d) dan juga pada $(V, d_f^*, *)$. Jika $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in (V, d)$, maka $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in (V, d_f^*, *)$.

Bukti:

Jika $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in (V, d)$, maka menurut Definisi 2.2.2,

$$d(x_n, x) < \epsilon$$
$$2d(x_n, x) < 2\epsilon$$

Untuk semua $t > 0$,

$$\frac{2d(x_n, x)}{t} < \frac{2\epsilon}{t}$$
$$-\frac{2d(x_n, x)}{t} > -\frac{2\epsilon}{t}$$
$$\exp\left(-\frac{2d(x_n, x)}{t}\right) > \exp\left(-\frac{2\epsilon}{t}\right)$$

Dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$ yang sangat kecil, didapat

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \exp\left(-\frac{2d(x_n, x)}{t}\right) > \lim_{\epsilon \to 0^+} \exp\left(-\frac{2\epsilon}{t}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{2d(x_n,x)}{t}\right) > 1$$
$$> 1 - \epsilon$$

atau

$$d_f^*(x_n, x, t) > 1 - \epsilon$$

Pertidaksamaan di atas seperti pada [7] yang disebut sebagai *strong* α-level, dimana $\alpha = 1 - \epsilon$. Karena $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\epsilon \to 0$ dan $d_f^*(x_n, x, t) \in [0,1]$, berakibat untuk $n \to \infty$, $x_n \to x$ yang berakibat pula dengan $d_f^*(x_n, x, t) \to 1$ sehingga pertidaksamaan di atas bisa ditulis

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = 1$$

Jadi, terbukti bahwa jika $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in (V, d)$, maka $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in (V, d_f^*, *)$.

Setelah membahas kekonvergenan barisan, berikut diberikan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik fuzzy dari [11] beserta contohnya

Definisi 4.1.5

Diberikan $(V, d_f, *)$ ruang metrik fuzzy dan $\{x_n\}$ barisan pada $(V, d_f, *)$. Barisan $\{x_n\}$ Cauchy jika $\forall \epsilon > 0, t > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $d_f(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon\ \forall n, m \geq n_0$

Contoh 4.1.5

Diberikan $(V, d_f, *)$ ruang metrik fuzzy dan $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada $(V, d_f, *)$

Bukti:

Akan dibuktikan Contoh 4.1.5 memenuhi Definisi 4.1.5, yaitu

$$d_f(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$$

Dengan meninjau ruas kiri dan menggunakan MF4 pada Definisi 4.1.2, didapat

$$\begin{aligned} d_f(x_n, x_m, t) &= d_f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, t\right) \\ &\geq d_f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \dots \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 4.1.3, diketahui bahwa $\frac{1}{n} \to 0$ untuk $n \to \infty$ sehingga

$$\begin{aligned} d_f(x_n, x_m, t) &\geq d_f\left(0{,}0, \frac{t}{m-n+1}\right) * d_f\left(0{,}0, \frac{t}{m-n+1}\right) \\ &\quad * \dots * d_f\left(0, \frac{1}{m-n}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \dots \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right) \end{aligned}$$

Menurut MF2 pada Definisi 4.1.2, karena $0 = 0$ berakibat

$$\begin{aligned} d_f(x_n, x_m, t) &\geq 1 * 1 * \dots * d_f\left(0, \frac{1}{m-n}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \dots \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\ &\quad * d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right) \end{aligned}$$

Menurut Nt3 pada Definisi 4.1.1,

$$\begin{aligned}
d_f(x_n, x_m, t) \geq 1 * 1 * \ldots * d_f\left(0, \frac{1}{m-n}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \ldots \\
* d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
* d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
= d_f\left(\frac{1}{m-n+1}, \frac{1}{m-n}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \ldots \\
* d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
* d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right)
\end{aligned}$$

Misalkan subbarisan $x_m \subseteq x_n$, maka menurut [13, Teorema 3.4.2] subbarisan $x_m \to x$ untuk $m \to \infty$ sehingga

$$\begin{aligned}
d_f(x_n, x_m, t) \geq d_f\left(\frac{1}{m-n+1}, \frac{1}{m-n}, \frac{t}{m-n+1}\right) * \ldots \\
* d_f\left(\frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
* d_f\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
= d_f\left(0, 0, \frac{t}{m-n+1}\right) * \ldots \\
* d_f\left(0, 0, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
* d_f\left(0, 0, \frac{t}{m-n+1}\right) \\
= 1 * \ldots * 1 * 1 \\
= 1 \\
> 1 - \epsilon
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di $(V, d_f, *)$.

Sebelum masuk pada kelengkapan ruang metrik fuzzy, akan diberikan suatu keterkaitan barisan Cauchy pada (V, d) dan $(V, d_f, *)$ melalui dua lemma berikut.

Lemma 4.1.6a [12]

Diberikan (V, d) ruang metrik, $(V, d_f^*, *)$ ruang metrik fuzzy yang ter-*induce* dari metrik $d(x, y)$ dan $\{x_n\}$ barisan pada (V, d) dan juga pada $(V, d_f^*, *)$. Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di (V, d), maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*, *)$

Bukti:

Dari Definisi 2.2.3, diketahui

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$
$$2d(x_n, x_m) < 2\epsilon$$

Untuk sebarang $t > 0$,

$$\frac{2d(x_n, x_m)}{t} < \frac{2\epsilon}{t}$$
$$-\frac{2d(x_n, x_m)}{t} > -\frac{2\epsilon}{t}$$
$$\exp\left(-\frac{2d(x_n, x_m)}{t}\right) > \exp\left(-\frac{2\epsilon}{t}\right)$$

Dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$ yang sangat kecil, didapat

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \exp\left(-\frac{2d(x_n, x_m)}{t}\right) > \lim_{\epsilon \to 0^+} \exp\left(-\frac{2\epsilon}{t}\right)$$

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{2d(x_n, x_m)}{t}\right) &> \exp(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

$$> 1 - \epsilon$$

atau

$$\exp\left(-\frac{2d(x_n, x_m)}{t}\right) > 1 - \epsilon$$

$$d_f^*(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$$

Jadi, terbukti jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di (V, d), maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*,*)$

Lemma 4.1.6b [12]

Diberikan (V, d) ruang metrik, $(V, d_f^*,*)$ ruang metrik fuzzy yang ter-*induce* dari metrik $d(x, y)$ dan $\{x_n\}$ barisan pada (V, d) dan juga pada $(V, d_f^*,*)$. Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*,*)$, maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy di (V, d)

Berdasarkan Lemma 4.1.6a dan 4.1.6b, dapat dibuat suatu teorema untuk kelengkapan ruang metrik fuzzy $(V, d_f^*,*)$.

Teorema 4.1.7

Diberikan (V, d) ruang metrik, $(V, d_f^*,*)$ ruang metrik fuzzy yang ter-*induce* dari metrik $d(x, y)$ dan $\{x_n\}$ barisan pada (V, d) dan juga pada $(V, d_f^*,*)$. $(V, d_f^*,*)$ merupakan ruang metrik fuzzy lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen.

Bukti:

Akan dibuktikan kelengkapannya dengan menunjukkan jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada $(V, d_f^*,*)$ konvergen dengan $d_f^*(x, y, t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$ menggunakan Lemma 4.1.4, Lemma 4.1.6 dan Definisi 2.2.5.

Karena diketahui $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*,*)$, berdasarkan Lemma 4.1.6b, berakibat $\{x_n\}$ barisan Cauchy di

(V, d). Karena (V, d) ruang metrik lengkap, dari Definisi 2.2.5, berakibat setiap barisan Cauchy di V konvergen. Berdasarkan Lemma 4.1.4, jika $\{x_n\}$ konvergen pada (V, d) maka $\{x_n\}$ konvergen pada $(V, d_f^*, *)$.

Dari penjelasan di atas, dapat dituliskan ke dalam bentuk implikasi sebagai berikut

$\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*, *) \Rightarrow \{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d) \Rightarrow \{x_n\}$ konvergen di $(V, d) \Rightarrow \{x_n\}$ konvergen di $(V, d_f^*, *)$.

Sehingga, dari implikasi tersebut dapat disimpulkan jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(V, d_f^*, *)$, maka $\{x_n\}$ konvergen di $(V, d_f^*, *)$ yang mana mengakibatkan ruang metrik fuzzy $(V, d_f^*, *)$ lengkap.

4.2. Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Fuzzy

Pada subbab ini, dibuat teorema titik tetap dari $T: V \to V$ pada ruang metrik fuzzy. Pada ruang metrik fuzzy ini, diberikan fungsi $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ yang memenuhi kriteria-kriteria berikut:

(P1) φ fungsi turun tegas dan *left continuous*
(P2) $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Setelah mendefinisikan fungsi φ, dibahas suatu teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy dari [14]

Teorema 4.2.1

Diberikan $(V, d_f, *)$ ruang metrik fuzzy lengkap, fungsi $T: V \to V$, fungsi $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ yang memenuhi (P1) dan (P2) dan fungsi $k: (0, \infty) \to (0,1)$. Jika untuk sebarang $t > 0$, T memenuhi kondisi

$$\varphi\left(d_f(Tx, Ty, t)\right) \leq k(t) \cdot \varphi(d_f(x, y, t)) \tag{4.1}$$

dimana $x, y \in V$, $x \neq y$, maka T punya titik tetap tunggal.

Bukti:

Akan dibuktikan sama seperti pada [3, Teorema 5.1.2]. Pertama, dengan mengambil barisan $\{x_n\}$ pada $(V, d_f, *)$, akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada $(V, d_f, *)$.

Sebelum itu, diberikan $x_0 \in V$ dan "barisan iterasi" dengan

$$\begin{aligned} x_1 &= Tx_0 \\ x_2 &= Tx_1 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= Tx_n \end{aligned}$$

dan $\tau_n(t) = M(x_{n+1}, x_n, t)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t > 0$. Misal, diasumsikan $0 < \tau_n(t) < 1$, Pertidaksamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \varphi\big(\tau_n(t)\big) &= \varphi\left(d_f(x_{n+1}, x_n, t)\right) \\ &= \varphi\left(d_f(Tx_n, Tx_{n-1}, t)\right) \\ &\leq k(t) \cdot \varphi\left(d_f(x_n, x_{n-1}, t)\right) \\ &= k(t) \cdot \varphi\big(\tau_{n-1}(t)\big) \\ &< \varphi\big(\tau_{n-1}(t)\big) \end{aligned}$$

atau

$$\varphi\big(\tau_n(t)\big) < \varphi\big(\tau_{n-1}(t)\big) \tag{4.2}$$

Karena φ fungsi turun tegas, berakibat $\{\tau_n(t)\}$ merupakan barisan monoton naik $\forall t > 0$. Misalkan $\lim_{n\to\infty} \tau_n(t) = \tau(t)$. Akibat dari hal ini, asumsi menjadi $0 < \tau(t) < 1$. Dari Pertidaksamaan (4.2) dapat pula ditulis

$$\begin{aligned} \varphi\big(\tau_n(t)\big) &> k(t) \cdot \varphi\big(\tau_n(t)\big) \\ &= k(t) \cdot \varphi\left(d_f(x_{n+1}, x_n, t)\right) \end{aligned}$$

$$\geq \varphi\left(d_f(Tx_{n+1}, Tx_n, t)\right)$$
$$= \varphi(x_{n+2}, x_{n+1}, t)$$
$$= \varphi\big(\tau_{n+1}(t)\big)$$

atau

$$\varphi\big(\tau_{n+1}(t)\big) \leq k(t) \cdot \varphi\big(\tau_n(t)\big) \tag{4.3}$$

Untuk $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\big(\tau_{n+1}(t)\big) \leq \lim_{n\to\infty} k(t) \cdot \varphi\big(\tau_n(t)\big)$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi\big(\tau_{n+1}(t)\big) \leq k(t) \cdot \varphi\big(\tau(t)\big)$$

Karena fungsi φ *left continuous*, berakibat $\lim_{n\to\infty} \varphi\big(\tau_{n+1}(t)\big) = \varphi\big(\tau(t)\big)$ sehingga

$$\begin{aligned} \varphi\big(\tau(t)\big) &\leq k(t) \cdot \varphi\big(\tau(t)\big) \\ &< \varphi\big(\tau(t)\big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Terlihat bahwa terjadi kontradiksi pada Pertidaksamaan (4.4), yaitu $\varphi\big(\tau(t)\big) < \varphi\big(\tau(t)\big)$. Karenanya, $\tau(t) \equiv 1$ atau $\big\{\varphi\big(\tau(t)\big)\big\} \to 1\ \forall t > 0$.

Lalu, untuk tahap menunjukkan barisan $\{x_n\}$ Cauchy di $(V, M, *)$, dilakukan dengan kontradiksi, yaitu andaikan $\{x_n\}$ bukan barisan Cauchy pada $(V, M, *)$ sehingga ada $\epsilon \in (0,1)$ dan barisan $\{p(n)\}$ dan $\{q(n)\}$ berakibat $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $t > 0$ didapat

$$p(n) > q(n) \geq n, \tag{4.5a}$$
$$d_f\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\big) \leq 1 - \epsilon, \tag{4.5b}$$
$$d_f\big(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\big) > 1 - \epsilon, \tag{4.5c}$$
$$d_f\big(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}, t\big) > 1 - \epsilon \tag{4.5d}$$

Dimisalkan $s_n(t) = d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right)$. Lalu, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dengan menjabarkan Pertidaksamaan (4.5b) menggunakan MF4 pada Definisi 4.1.2 didapat

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon \geq s_n(t) & \\ &= d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right) \\ &\geq d_f\left(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}, \frac{t}{2}\right) * d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}, \frac{t}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dengan (4.2) dan (4.5d), Pertidaksamaan (4.6) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} & d_f\left(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}, \frac{t}{2}\right) * d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}, \frac{t}{2}\right) \\ & \geq \tau_{p(n)-1}\left(\frac{t}{2}\right) * (1 - \epsilon) \\ & \geq \tau_n\left(\frac{t}{2}\right) * (1 - \epsilon) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Karena $\tau_n\left(\frac{t}{2}\right) \to 1$ untuk $n \to \infty\ \forall t$, dari (4.6) dan (4.7) bisa dikatakan bahwa $\{s_n(t)\} \to (1 - \epsilon)\quad \forall t > 0$. Lalu, dengan menggunakan (4.2) pada (4.5b),

$$\begin{aligned} \varphi\left(d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right)\right) &= \varphi\left(d_f\left(Tx_{p(n)-1}, Tx_{q(n)-1}, t\right)\right) \\ &\leq k(t) \cdot \varphi\left(d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\right)\right) \\ &< \varphi\left(d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\right)\right) \end{aligned}$$

atau

$$\varphi\left(d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right)\right) < \varphi\left(d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\right)\right) \tag{4.8}$$

Akibat Pertidaksamaan (4.8), karena fungsi φ monoton turun, $d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right) > d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\right)\ \forall n$.

Dari Pertidaksamaan (4.5b), akibat dari (4.8) dan (4.5c), bisa dituliskan

$$\begin{aligned} 1-\epsilon &\geq d_f\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}, t\right) \\ &> d_f\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)-1}, t\right) \\ &> 1-\epsilon \end{aligned} \tag{4.9}$$

Terlihat bahwa terjadi kontradiksi pada Pertidaksamaan (4.9), yaitu $1-\epsilon > 1-\epsilon$.

Jadi, $\{x_n\}$ barisan Cauchy di ruang metrik fuzzy lengkap. Akibatnya, bisa disimpulkan ada $x \in V$ sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Untuk selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari T. Akibat dari $0 < \tau_n(t) < 1$, maka ada subbarisan $\{x_{r(n)}\}$ dari $\{x_n\}$ sehingga $x_{r(n)} \neq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dari (4.2), dengan menggunakan $x_{r(n)}$ dan Tx didapat

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi\left(d_f\left(x_{r(n)+1}, Tx, t\right)\right) \\ &= \varphi\left(d_f\left(Tx_{r(n)}, Tx, t\right)\right) \\ &\leq k(t)\cdot\varphi\left(d_f\left(x_{r(n)}, x, t\right)\right) \end{aligned}$$

atau

$$\varphi\left(d_f\left(x_{r(n)+1}, Tx, t\right)\right) \leq k(t)\cdot\varphi\left(d_f\left(x_{r(n)}, x, t\right)\right) \tag{4.10}$$

Dari (4.10), untuk $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(d_f\left(x_{r(n)+1}, Tx, t\right)\right) \leq \lim_{n\to\infty} k(t)\cdot\varphi\left(d_f\left(x_{r(n)}, x, t\right)\right)$$

Karena $x_{r(n)}$ subbarisan dari x_n dan $x_n \to x$, berakibat $x_{r(n)} \to x$ untuk $n \to \infty$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(d_f\left(x_{r(n)+1}, Tx, t\right)\right) \leq \lim_{n\to\infty} k(t)\cdot\varphi\left(d_f\left(x_{r(n)}, x, t\right)\right)$$

$$\varphi\left(d_f(x,Tx,t)\right) \leq k(t)\cdot\varphi\left(d_f(x,x,t)\right) \tag{4.11}$$

Dengan MF2 pada Definisi 4.1.2 dan (P2), dapat ditulis

$$\begin{aligned}\varphi\left(d_f(x,Tx,t)\right) &\leq k(t)\cdot\varphi(1)\\ &= k(t)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dari (4.10) sampai (4.12), didapat $\varphi\left(d_f(x,Tx,t)\right) = 0$. Berdasarkan (P2), bisa ditunjukkan bahwa $d_f(x,Tx,t) = 1$. Berdasarkan MF2 pada Definisi 4.1.2, dapat disimpulkan bahwa $Tx = x$ sehingga x adalah titik tetap dari T.

Untuk menunjukkan ketunggalannya, andaikan ada titik tetap yang lain, katakan $y \in V$ dan $y \neq x$. Akibat dari pengandaian ini didapat

$$\varphi\left(d_f(x,y,t)\right) = \varphi\left(d_f(Tx,Ty,t)\right) \tag{4.13}$$

Berdasarkan (1) dan (2), Persamaan (4.13) dapat ditulis

$$\begin{aligned}\varphi\left(d_f(x,y,t)\right) &= \varphi\left(d_f(Tx,Ty,t)\right)\\ &\leq k(t)\cdot\ \varphi\left(d_f(x,y,t)\right)\\ &< \varphi\left(d_f(x,y,t)\right)\end{aligned} \tag{4.14}$$

Terlihat bahwa terjadi kontradiksi pada Pertidaksamaan (4.14), yaitu $\varphi\left(d_f(x,y,t)\right) < \varphi\left(d_f(x,y,t)\right)$. Karena hal ini, haruslah $y = x$ yang berakibat x adalah titik tetap tunggal dari T.

Setelah itu, diberikan contoh yang memenuhi Teorema 4.2.1 yang terdapat pada [14]

Contoh 4.2.2

Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan

$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

dengan $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,2)$, $D = (0,1)$, $E = (1,3)$, $\varphi(\tau) = 1 - \sqrt{\tau}$ $\forall \tau \in [0,1]$ dan $d_f^*(x, y, t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$ $\forall t > 0$ dengan $d(x, y)$ merupakan metrik Euclid pada $\mathbb{R}^2$. Misalkan $T: V \to V$ dengan

$$T(A) = T(B) = T(C) = T(D) = A$$
$$T(E) = B$$

dan fungsi $k: (0, \infty) \to (0,1)$ yang didefinisikan

$$k(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{4}{t}}, & 0 < t \leq 2 \\ \dfrac{t}{t+1}, & t > 2 \end{cases}$$

Dari Contoh 4.2.2, akan ditunjukkan x adalah titik tetap tunggal dari T dengan $x = A$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 4.2.2 di atas, berdasarkan Definisi 4.1.2 hingga Teorema 4.1.7, $(V, d_f^*, *)$ merupakan ruang metrik fuzzy lengkap. Untuk membuktikan fungsi φ memenuhi (P1) dan (P2), diambil sebarang $\tau_i, \tau_j \in [0,1]$ dengan $i \neq j$. Jika diasumsikan $\tau_i < \tau_j$, maka

$$\sqrt{\tau_i} < \sqrt{\tau_j}$$
$$-\sqrt{\tau_i} > -\sqrt{\tau_j}$$
$$1 - \sqrt{\tau_i} > 1 - \sqrt{\tau_j}$$
$$\varphi(\tau_i) > \varphi(\tau_j)$$

Sehingga, dari hasil di atas, dengan mengambil sebarang elemen pada [0,1] bisa dipaparkan bahwa fungsi φ monoton, dimana untuk kasus ini monoton turun. Untuk *left continuous*, dimisalkan ada $r \in \mathbb{R}^+$ dan $r \to 0$ yang memenuhi

$$\varphi(\tau - r) = \varphi(\tau)$$

Untuk fungsi φ yang diberikan,

$$\varphi(\tau - r) = 1 - \sqrt{\tau - r}$$

Untuk $r \to 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} \varphi(\tau - r) &= \lim_{r \to 0^+} 1 - \sqrt{\tau - r} \\ &= 1 - \sqrt{\tau - 0} \\ &= 1 - \sqrt{\tau} \\ &= \varphi(\tau) \end{aligned}$$

Sehingga, untuk (P1) terpenuhi. Untuk (P2), dibagi dalam dua kasus

($\Rightarrow$) $\varphi(\lambda) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= 0 \\ 1 - \sqrt{\lambda} &= 0 \\ 1 - 0 &= \sqrt{\lambda} \\ 1 &= \sqrt{\lambda} \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \sqrt{\lambda} &= \sqrt{1} \\ \sqrt{\lambda} &= 1 \\ 1 - \sqrt{\lambda} &= 0 \\ \varphi(\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga (P2) terpenuhi. Jadi, fungsi φ memenuhi (P1) dan (P2).

Lalu, selanjutnya dibuktikan fungsi $k(t)$ memenuhi Persamaan (4.1), yaitu

$$\varphi\left(d_f^*(Tx, Ty, t)\right) \leq k(t) \cdot \varphi(d_f^*(x, y, t))$$

Akan dibuktikan Pertidaksamaan (4.1) dengan kontradiksi, yaitu andaikan

$$k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right) < \varphi\left(d_f^*(Tx, T\,y, t)\right)$$

Diketahui bahwa $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ untuk $x, y \in V$. Menurut [3, Teorema 1.4.8], akibat dari kekonvergenan x_n dan y_n berimplikasi $Tx_n \to Tx$ dan $Ty_n \to Ty$ sehingga

$$k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right) < \varphi\left(d_f^*(Tx, Ty, t)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x_n, y_n, t)\right) < \lim_{n\to\infty} \varphi\left(d_f^*(Tx_n, Ty_n, t)\right)$$

Dengan menghilangkan limit di kedua ruas,

$$k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x_n, y_n, t)\right) < \varphi\left(d_f^*(Tx_n, Ty_n, t)\right)$$

Berdasarkan (4.2) didapat

$$\begin{aligned} k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x_n, y_n, t)\right) &< \varphi\left(d_f^*(Tx_n, Ty_n, t)\right) \\ &= \varphi\left(d_f^*(x_{n+1}, y_{n+1}, t)\right) \end{aligned}$$

Dengan meninjau pertidaksamaan di atas, terdapat kontradiksi dengan (4.3), yaitu

$$\varphi\left(d_f^*(x_{n+1}, y_{n+1}, t)\right) \leq k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x_n, y_n, t)\right)$$

Sehingga pengandaian salah.

Karena telah dibuktikan bahwa $\varphi\left(d_f^*(Tx, Ty\ , t)\right) \leq k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right)$ dan diketahui $k(t) \cdot \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right) < \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right)$ untuk $k(t) \in (0,1)$ dengan $t > 0$, berakibat memenuhi $\varphi\left(d_f^*(Tx, Ty, t)\right) < \varphi\left(d_f^*(x, y, t)\right)$

Karena $(V, d_f^*, *)$ yang didefinisikan merupakan ruang metrik fuzzy lengkap, fungsi φ pada Contoh 4.2.2 memenuhi (P1) dan (P2) dan fungsi k memenuhi Pertidaksamaan (4.1), berakibat menurut Teorema 4.2.1, dijamin fungsi T mempunyai titik tetap.

Untuk menunjukkan A adalah titik tetap dari T, atau dengan kata lain

$$TA = A$$

Digunakan Persamaan (4.10)-(4.12), yaitu

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi\left(d_f^*(A, TA, t)\right) \\ &= \varphi\left(d_f^*(TA, TA, t)\right) \\ &\leq k(t) \cdot\ \varphi\left(d_f^*(A, A, t)\right) \\ &= k(t) \cdot \varphi(1) \\ &= k(t) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

didapat $\varphi\left(d_f^*(A, TA, t)\right) = 0$. Berdasarkan (P2), bisa ditunjukkkan bahwa $d_f^*(A, TA, t) = 1$. Berdasarkan MF2 pada Definisi 4.1.2, bisa disimpulkan bahwa $TA = A$ yang berakibat A adalah titik tetap dari fungsi T.

Untuk menunjukkan ketunggalannya, andaikan ada titik tetap yang lain, katakan $A' \in V$ dan $A' \neq A$. Akibat dari pengandaian ini, berdasarkan (4.13) dan (4.14),

$$\begin{aligned} d_f^*(A, A', t) &= d_f^*(TA, TA', t) \\ &\leq k(t) \cdot\ d_f^*(A, A', t) \end{aligned}$$

$$< d_f^*(A, A', t)$$

Didapat suatu kontradiksi, yaitu $d_f^*(A, A', t) < d_f^*(A, A', t)$ yang mengakibatkan pengandaian salah. Karena hal ini, $A' = A$ yang berakibat A adalah titik tetap tunggal dari T

BAB V
PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, terkait ruang metrik fuzzy, baik dari kekonvergenan barisan, barisan Cauchy dan kelengkapannya serta teorema titik tetap yang berlaku, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. $(V, d_f^*, *)$ merupakan ruang metrik fuzzy lengkap dengan d fungsi metrik di V, $d_f^* \subseteq (V, d)^2 \times (0, \infty)$ dan $d_f^*: d_f^* \to [0, 1]$ yang didefinisikan $d_f^*(x, y, t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$ $\forall x, y \in V$ $t > 0$ serta $*$ norm-t kontinu yang didefinisikan $a * b = ab$.

2. Jika $\{x_n\}$ konvergen pada (V, d), maka $\{x_n\}$ konvergen pada $\left(V, d_f^*, *\right)$. Begitu pula jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada (V, d), maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada $\left(V, d_f^*, *\right)$

3. Dari Teorema 4.2.1, dengan mendefinisikan $V = \{A, B, C, D, E\}$ dengan $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,2)$, $D = (0,1)$, $E = (1,3)$, $\varphi(\tau) = 1 - \sqrt{\tau}$ $\forall \tau \in [0,1]$, $d_f^*(x, y, t) = \exp\left(-\frac{2d(x,y)}{t}\right)$ $\forall t > 0$ dengan $d(x, y)$ merupakan metrik Euclid pada $\mathbb{R}^2$, fungsi $T: V \to V$ dengan $T(A) = T(B) = T(C) = T(D) = A$ dan $T(E) = B$ serta fungsi $k: (0, \infty) \to (0,1)$ yang didefinisikan seperti pada Contoh 4.2.2, didapat suatu titik tetap dari T, atau $Tx = x$ dengan $x = A$

5.2. Saran

Ada beberapa hal yang terkait dengan ruang metrik fuzzy yang belum diteliti lebih dalam, sehingga penulis memberikan saran untuk penelitian selanjutnya, antara lain :

1. Pada penelitian selanjutnya, bisa digunakan kembali fungsi yang sama pada Tugas Akhir ini, yaitu

   $$d_f^*(x,y,t) = a^{-\frac{2d(x,y)}{t}}$$

   dengan $a = e$, namun menggunakan nilai a yang berbeda, antara lain $a = \mathbb{R}^+ - \{1, e\}$ atau $a = \mathbb{R}^-$

2. Menggunakan norm-s (conorm-t) sebagai pembanding dengan penelitian ini, seperti yang dipaparkan pada [16].

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Kumam Poom dan Wutiphol Sintunavarat. 2011. *Common Fixed Point Theorems for a Pair of Weakly Compatible Mappings in Fuzzy Metric Spaces*. Bangkok. Hindawi Publishing Corp.Hlm 1-14

[2]. Turkoglu D., S. Sedghi, N. Shobe. 2009. *A Common Fixed Point Theorem in Complete Fuzzy Metric Spaces.* Ankara. Novi Sad J. Math. Hlm 11-20

[3]. Kreyszig Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Kanada. John Wiley & Sons, Inc.

[4]. Yunus Mahmud. 2005. Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional. Surabaya. Departemen Matematika ITS.

[5]. Gregori Valentin, Juan Jose Minana, Samuel Morillas. 2015. *On Completable Fuzzy Metric Spaces*. Valencia. Elsevier. Hlm 133-139

[6]. Zadeh L. A.. 1965. *Fuzzy Sets*. California. Inform and Control 8. Hlm 338-353

[7]. Zimmerman. 1992. *Fuzzy Set Theory and Its Applications 2ed*. Massachusetts. Kluwer Academic Publishers

[8]. Czerwik S.. 1993. *Contraction Mappings in b-Metric Spaces*. Ostrava. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis. Hlm 5-11

[9]. LG Huang dan Zhang Xian. 2006. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings*. Xiamen. J. Math. Anal. Appl. Hlm 1468-1476.

[10]. Kramosil Ivan dan J. Michalek. 1975. *Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces.* Kybernetika 11. Hlm 326-334

[11]. George A. dan P. Veeramani. 1993. *On Some Results in Fuzzy Metric Spaces*. India. Madras-600 036. Hlm 395-399

[12]. Sapena Almanzor. 2001. *A Contribution to Study of Fuzzy Metric Spaces*. Valencia. Universidad Politecnica de Valencia. Vol 2, No. 1, hlm 63-75.

[13]. Bartle Robert G., dan Donald R. Sherbert. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Illinois. University if Illinois, Urbana-Champaign. John Wiley & Sons, Inc.

[14]. Shen Y. et al. 2011. *Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces*. Tianshui. Tianshui Normal University. Elsevier. Hlm 138-141.

[15]. Nuril Z. Auda, Sunarsini, Yunus M., Sadjidon. 2016. Pemetaan Kontraktif pada Ruang b-Metrik Cone $\mathbb{R}$ Bernilai $\mathbb{R}^2$. Surabaya. J. Math and Its Appl. Vol 13 No 2. Hlm 1-10

[16]. Noorani M. S. M. dan M. Rafi. 2006. *Fixed Point Theorem on Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces.* Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 3, No. 1, hlm 23-29

[17]. Lebl Jiri. 2018. *Basic Analysis I, Introduction to Real Analysis* Vol. I. California.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Zicky Lukman, lahir di Jember, 29 Oktober 1995. Penulis memulai jenjang pendidikan formal dari TK Al Furqon Jember (2001-2002), SDN Jember Lor 1 (2002-2008), Semesta Bilingual Boarding School (2008-2011) sampai SMAN 1 Jember (2011-2014). Setelah lulus dari pendidikan menengah atas, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2014 hingga sekarang melalui jalur SBMPTN dengan NRP 06111440000084. Selama menempuh studi di Departemen Matematika, penulis mengambil bidang minat Matematika Analisis. Selain aktif berkuliah, penulis sempat aktif di organisasi kerohanian melalui Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqlah Matematika ITS sebagai Ketua Biro Pelatihan di Departemen Kaderisasi (2015-2016) dan Ketua Departemen Kaderisasi (2016-2017). Selain itu juga, dalam kurun 2015-2018, penulis menjadi asisten dosen, baik Kalkulus 1 maupun Kalkulus 2, di ITS selama 6 semester.

Untuk pertanyaan lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini, bisa menghubungi penulis via WA (085859557005) atau *email* ke *lukmanzicky@gmail.com*